Oppsummering om kretser med R, L og C

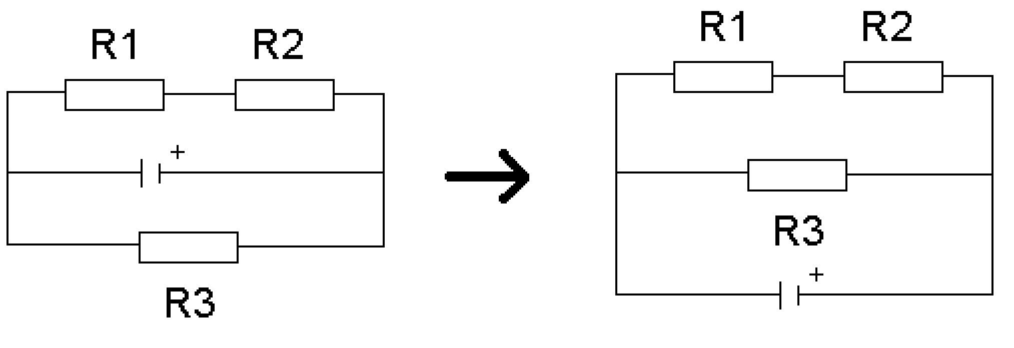
FYS1120

Likestrømskretser med motstander

- Strøm og spenning er alltid i fase.
- Ohms lov: $V = RI$
- Effekt er gitt ved: $P = VI = RI^2 = V^2/R$
- Kirchoffs lover:
- Summen av spenningsfall rundt en lukket sløyfe er null.
- Summen av strømmer inn til et knutepunkt er summen av strømmer ut fra det samme knutepunktet.
- Pass på fortegnene når du setter opp Kirchoffs lover! Vanlig feil på eksamen.

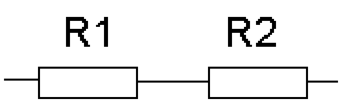
Praktiske tips

- Det er ofte en fordel å tegne kretsen med strømkilden utenfor for å lettere se hva løsningen blir.
- Dekomponer mer kompliserte kretser til kombinasjoner av serie og parallellkoblinger.

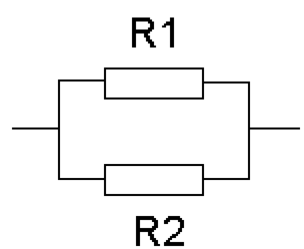


Seriekobling og paralellkobling av motstander

- Motstander i serie skal summeres for å finne den totale motstanden R
- For motstander i paralell summerer man inversverdiene for å finne 1/R
- Her vist for to motstander. Hvis det er flere motstander, er det bare å utvide uttrykkene med tilsvarende ledd.



$\rightarrow$ R = R1 + R2

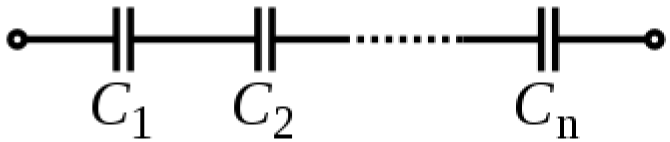


$\rightarrow$ 1/R = 1/R1 + 1/R2

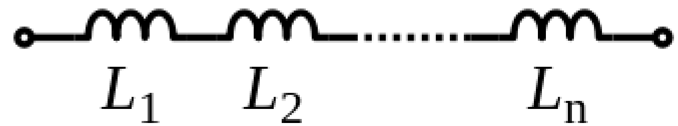
Spoler og kondensatorer

- Strømmen er ladning pr tidsenhet, dvs den tidsderiverte av ladningen.
- For kondensator: $CV = Q$ noe som gir at $V = Q/C$
- For spole: $V = -L dI/dt = -L d^2Q/dt^2$
- Dette betyr at strøm og spenning ikke lenger nødvendigvis er i fase. For kretser uten motstand: Strømmen i en kondensator ligger $\pi/2$ radianer foran spenningen. Strømmen i en spole ligger $\pi/2$ radianer bak spenningen.

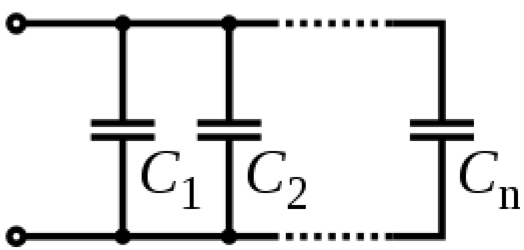
Serie/parallellkoblinger av spoler og kondensatorer



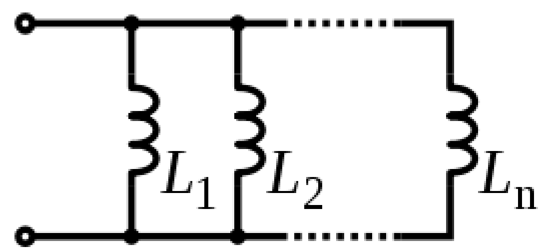
$$\frac{1}{C_{\text{total}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}.$$



$$L_{\text{total}} = L_1 + L_2 + \cdots + L_n$$



$$C_{\text{total}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n.$$



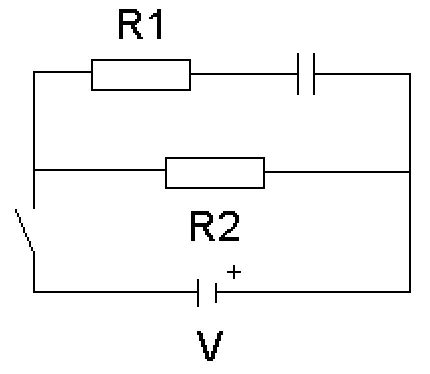
$$\frac{1}{L_{\text{total}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \cdots + \frac{1}{L_n}.$$

Tips til eksamen

- Husk at hvis $t = 0$ eller $t = \infty$, så kan man ofte gjøre forenklinger for å finne strømmer i LIKESTRØMSKRETSER. Dette sparer tid og regning.
- En tom kondensator $\rightarrow V_C = Q/C = 0 \rightarrow$ kortslutning for $t = 0$.
- Fulladet kondensator $\rightarrow$ brudd når $t = \infty$
- Spole $\rightarrow$ brudd når $t = 0$
- Spole $\rightarrow$ kortslutning i $t = \infty$, siden $V_L = -LdI/dt = 0$ når strømmen ikke lenger varierer.

Eksempel

- Kretsen ser slik ut



- Ved t = 0 lukkes bryteren og motstanden i kretsen finnes fra parallellkoblingen til R1 og R2
- Ved $t = \infty$ går det bare strøm i R2

Vekselstrøm

- Spenningen er gitt ved en sinus eller cosinusfunksjon. Disse er ekvivalente og skiller seg bare med en fasefaktor.
- $V = V_{max} \cos \omega t$ eller $V = V_{max} \sin \omega t$
- Middelverdien av $\cos^2 \omega t = 1/2$
- Middelverdien av $\sin^2 \omega t = 1/2$
- Dette kan du finne ved direkte integrasjon over en periode, og det er også en direkte konsekvens av at $\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$

Midlere effekt utviklet i en motstand i en vekselstrømskrets

- Hvis vi har en motstand med en påtrykt vekselspenning har vi fortsatt uttrykkene for effekt fra likestrømslæren, men nå er vi nødt til å jobbe med momentanverdier. Den momentane effekten er gitt ved P = VI.
- For å finne den midlere effekten integrerer man over en periode fra 0 til 2π.
- $P = V_{max}\, I_{max} \langle\cos^2\omega t\rangle = (V_{max}I_{max})/2$
- Vi ser at vi like gjerne kunne jobbet med $V_{rms} = V/\sqrt{2}$ og $I_{rms} = I/\sqrt{2}$ for å finne den midlere effekten. rms står for Root mean square

Differensiallikninger

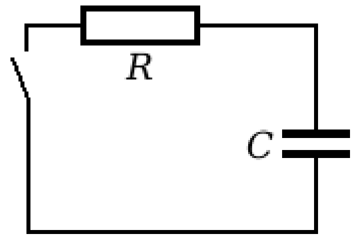
- Første orden, $ax' + bx = 0$: Kan bare ha eksponensiell dempning som løsning, løses ved separasjon.
- Annen orden, $ax'' + bx' + cx = 0$: Udempede svingninger, dempede svingninger og rene dempede løsninger.

RC og RL kretser

- Kretsene er av første orden og kan løses med separable, 1.ordens differensiallikninger.
- Viktig å sette riktige initialbetingelser!

RC krets

- Vi starter med V_0 på kondensatoren og søker å finne V en tid t etter at bryteren lukkes



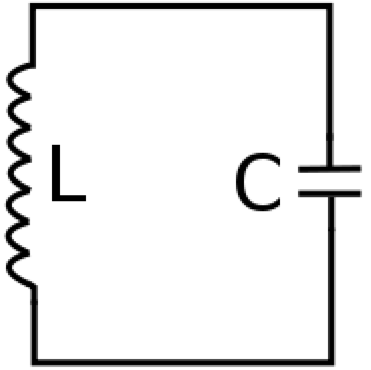
- Kirchoff gir $$C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = 0$$
- Løsningen er $$V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}$$
- Etter en tidskonstant τ = RC er spenningen redusert til 1/e ganger den opprinnelige spenningen, eller ca 37% av den
- RL kretser med utladning av en spole igjennom en motstand løses på tilsvarende måte og har tidskonstant τ = R/L

LC krets (uten R)

- Av annen orden, løses med 2.ordens differensiallikning.
- Trenger to initialbetingelser, f.eks strømmen i kretsen og ladningen på C ved gitte tidspunkter.
- Har alltid løsning udempede svingninger, dvs en sinus eller cosinusfunksjon. Disse er ekvivalente og skiller seg bare med en fasefaktor.
- Kirchoff gir: $V_C = V_L \rightarrow Q/C - Ld^2Q/dt^2 = 0$
- $d^2Q/dt^2 + Q/LC = 0$
- $Q(t) = Q_0 \cos\omega t$, der $\omega = 1/\sqrt{LC}$
- Initialbetingelsene her er at

  kondensatoren startet med $Q = Q_0$

  og at det ikke gikk noen strøm, $0 = dQ/dt$



Mer om LC krets

- En annenordens differensialligning trenger to initialbetingelser, som du vil få oppgitt i eventuelle oppgaver. Det kan f.eks være Q i kondensatoren på et tidspunkt og strømmen I i kretsen. Hvis du har tidsuttrykket for Q, deriverer du mhp. tiden for å finne en ligning til for I.
- Energien i en slik krets er konstant siden det ikke er noen motstand den dissiperes i. Summen W av elektrostatisk energi i C og magnetisk energi i L er bevart.
- $W = ½\, LI^2 + ½\, Q^2/C$

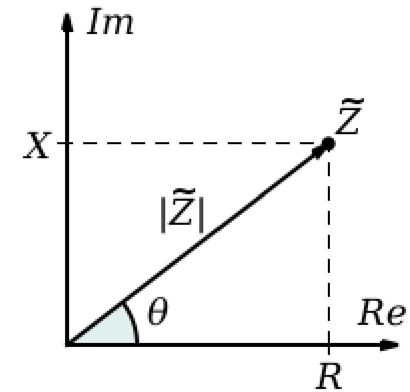
Resistans, reaktans, impedans. Ohms lov på kompleks form i kretser med kondensatorer og spoler

- En motstand har *resistans* R.
- Ideelle spoler og kondensatorer har ikke resistans, de har derimot *reaktans* $X_L = \omega L$ og $X_L = 1/\omega C$
- Det skjer intet energitap i en komponent med bare reaktans. Energien bare svinger frem og tilbake mellom komponenten og kilden
- Man betegner den komplekse størrelsen

  $Z = R + iX$ for *impedans*

Ohms lov på kompleks form i kretser med kondensatorer og spoler

- Ohms lov blir nå V = ZI istedenfor V = RI
- Z, impedans, er en “generalisert” motstand
- Hvis vi regner med impedanser slipper vi å sette opp vanskelige differensiallikgninger og kan istedenfor regne med algebraiske ligninger.
- Kirchoffs lover gjelder fortsatt for momentanverdier av V og I.

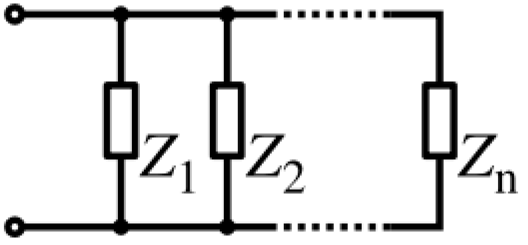


Impedanser i serie og parallell

- Legges sammen som motstander

$$Z_{\text{eq}} = Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n$$

$$Z_{\text{eq}} = R + jX = (R_1 + R_2 + \cdots + R_n) + j(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$



$$\frac{1}{Z_{\text{eq}}} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \cdots + \frac{1}{Z_n}$$

Midlet effekt i vekselstrømskretser

- ALLTID gitt ved $P = V_{rms} I_{rms} \cos \varphi$
- φ er *faseforskyvningen* eller *fasevinkelen*
- Dette er et mål på hvor mye ”utakt” det er mellom strøm og spenning i kretsen. Hvis man ser på V og I som roterende vektorer, ser man at P er skalarproduktet av dem.
- For rent resistive kretser er $\cos\varphi = 1$. For rent induktive og kapasitive kretser er $\cos\varphi = 0$ og ingen effekt utvikles.

RLC kretser

- Disse beskrives av annenordens differensialligninger og kan ha dempede svingninger eller overdempede svingninger som løsning.
- Resonans ved den frekvensen at imaginære bidrag til impedansen kansellerer ut.

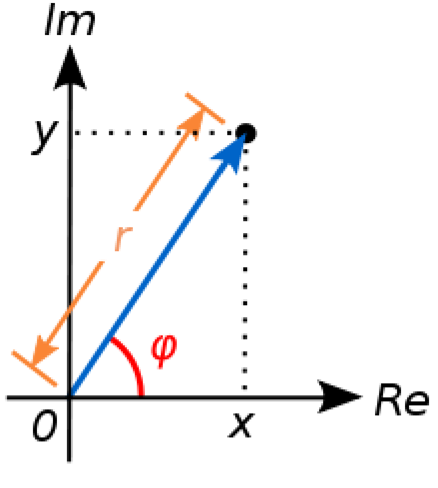
Komplekse tall

- Hvis vi har $r = x + iy$ er absoluttverdien til r gitt ved $|r| = \sqrt{(x^2+y^2)}$ og argumentet, eller i dette tilfellet fasevinkelen gitt ved $\varphi = \arctan(x/y)$
- Har også at $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$
- Da kan vi skrive r på formen

$r = |r|e^{i\varphi}$

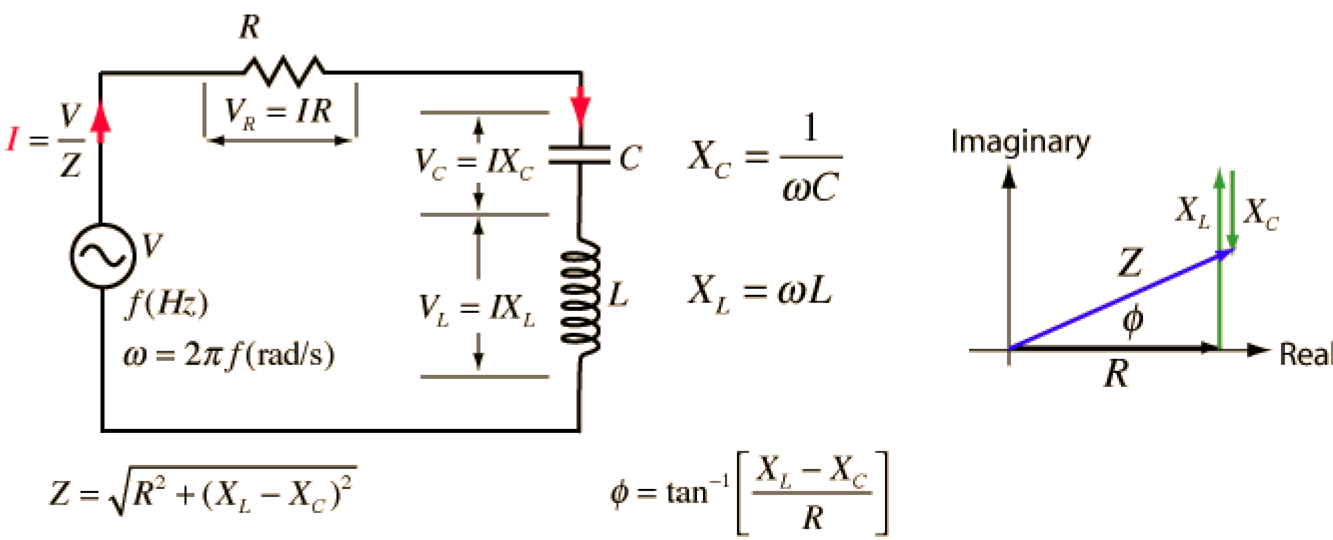
med $x = \cos\varphi$ og $y = \sin\varphi$

Dette kalles *polar form*

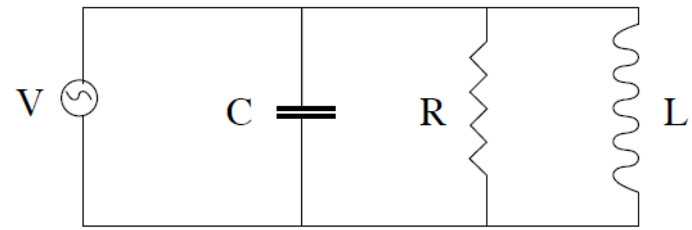


Serie RLC krets

- Impedansen og fasen kan finnes fra å se på diagrammet i det komplekse plan.
- Resonant når $X_L = X_C$, $\varphi = 0$, $Z = R$
- I dette tilfellet er $\omega = 1/\sqrt{LC}$

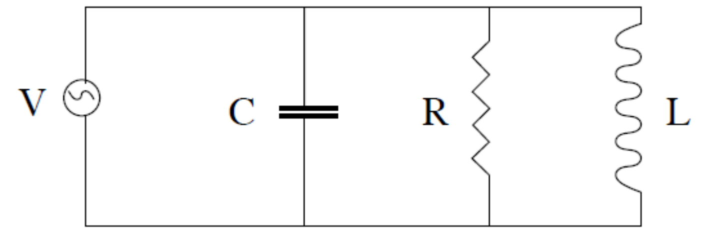


Parallell RLC krets fra eksamen H2010



- Drevet av $V = V_0 \cos\omega t$
- Først i oppgaven skulle man finne strømmene. Man kan se på strømmene i hvert enkelt element hver for seg: $I_Z = V/Z = V_0 e^{i\omega t}/Z$
- Motstanden har $Z_R = R$, så $I = V_0 e^{i\omega t}/R$
- Kondensatoren har $Z_C = 1/i\omega C = e^{-i\pi/2}/\omega C$, dette gir $I_C = (V_0 \omega C) e^{i(\omega t + \pi/2)}$
- Spolen har $Z_L = i\omega L = e^{i\pi/2}\omega L$, dette gir
  $I_L = (V_0/\omega L) e^{i(\omega t - \pi/2)}$

Parallell RLC krets fra eksamen H2010



- $1/Z = 1/Z_R + 1/Z_C + 1/Z_L$
  $= i\omega C + 1/R + 1/i\omega L$
- $1/(1/R + i(\omega C - 1/\omega L)) = Z$
- $1/(1/R - i(\omega C - 1/\omega L) = Z^*$ (konjugert)
- Vi ønsker å finne $|Z|$ og φ
- $|Z| = ZZ^* = 1/(1/R^2 + (\omega C - 1/\omega L)^2)$
- $Z = 1/(1/R + i(\omega C - 1/\omega L)) =$
  $(1/R - i(\omega C - 1/\omega L))/|Z|$

Dette gir $\varphi = \arctan((1/\omega L - \omega C)/(1/R))$

Parallell RLC krets fra eksamen H2010

- Hvis du nå setter inn tallverdiene for ω, R, C og L, så får du fasitsvarene for impedansen og fasen.
- $\omega = 1/\sqrt{LC}$ er også resonnansfrekvens for denne kretsen, det kan du lett se fra uttrykket for fasen. $|Z|$ er da lik R.
- Imidlertid er dette en toppverdi for impedansen, fremfor en bunnverdi, slik det er i serie RLC kretsen.