Litt om magnetfelt fra spoler

I forelesningene har vi beregnet feltet på aksen for en sirkulær strømsløyfe med radius a og som fører en strøm I. Er avstanden til sløyfen x, kan resultatet for feltet langs aksen skrives som

$$B(x) = \frac{\mu_0 a^2 I}{2(a^2 + x^2)^{3/2}} \tag{1}$$

Det har en maksimal verdi $B = \mu_0 I/2a$ i sentrum $x = 0$ av sløyfen. For større verdier av x avtar feltet raskt. Når $x > a$ finner vi ved en enkel Taylor-utvikling

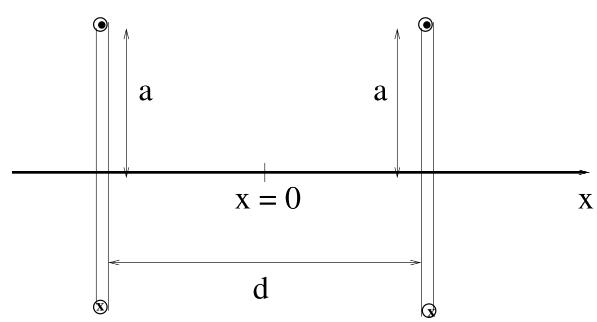
$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2x^3}\left(1 - \frac{3a^2}{2x^2}\right)$$

når vi tar kun med de ledende ledd. Dipolmomentet av sløyfen er $m = I\pi a^2$ slik at feltet blir $B = \mu_0 m/2\pi x^3$ når $x \gg a$. Dette resulatet kjenner vi igjen som feltet fra en dipol.

Har en slik strømsløyfe N vindinger som alle fører den samme strømmen, kalles det en spole. Hvis alle vindingene ligger oppå hverandre, blir feltet ganske enkelt N ganger sterkere enn det som er gitt ved formel (1).

1 Helmholtz spolepar

Man kan skape et tilnærmet konstant magnetfelt over et større område ved å sette sammen to slike smale spoler med sammenfallende akser som vist i figuren. Avstanden mellom dem kaller vi d og midtpunktet mellom dem har koordinaten $x = 0$. Når vindingene i de to spolene nå antas å gå i samme retning, blir det kombinerte



feltet B_T langs aksen i punktet x gitt ved summen $B_T(x) = B(x+d/2) + B(x-d/2)$

hvor feltet fra hver av spolene er gitt ved (1). Setter vi inn, får vi

$$B_T(x) = \frac{1}{2}\mu_0 a^2 NI \left(\frac{1}{[a^2 + (x + d/2)^2]^{3/2}} + \frac{1}{[a^2 + (x - d/2)^2]^{3/2}} \right)$$

Dette uttrykket er symmetrisk om $x = 0$. Det vil si at hvis vi nå Taylor-utvikler feltet om dette punktet, vil alle odde termer i x falle bort. Vi vil dermed få etter en noe omstendelig beregning

$$B_T(x) = \frac{\mu_0 a^2 NI}{(a^2 + d^2/4)^{3/2}} \left[1 - \frac{3}{2}\frac{a^2 - d^2}{(a^2 + d^2/4)^2} x^2 + \frac{15}{8}\frac{a^4 - 3a^2 d^2 + d^4/2}{(a^2 + d^2/4)^4} x^4 + \cdots \right]$$

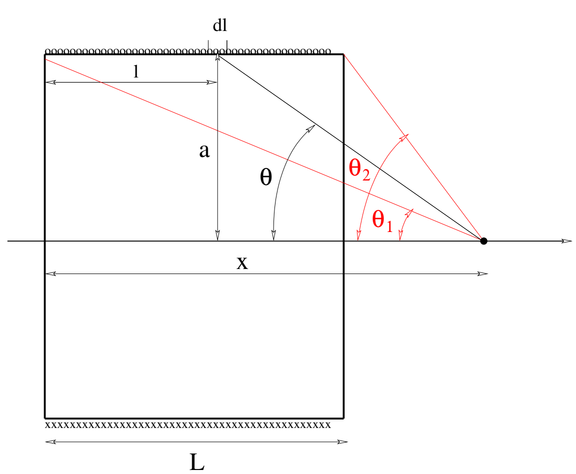
Vi ser herav at hvis vi nå velger $d = a$, vil leddet x^2 også falle bort, og vi står igjen med

$$B_T(x) = \frac{\mu_0 NI}{(5/4)^{3/2} a} \left[1 - \frac{144 x^4}{125 a^4} \right] \tag{2}$$

Så lenge som $x < a$ gir dette resultatet for feltet en omtrent konstant verdi. For eksempel, hvis $x/a = 0.3$, er feltet bare blitt 1% mindre enn hva det er i origo $x = 0$. For denne spesielle avstanden $d = a$ har vi dermed et *Helmholtz spolepar* som har stor praktisk betydning i fysikk og teknologi.

2 Solenoider

La oss nå betrakte en spole med radius a, lengde L og som frer en strøm I. Den har



N vindinger. Er disse jevnt fordelt, har den en konstant vindingstetthet $n = N/L$. Inspirert av engelsk, blir en slik spole av og til kalt en solenoid.

Vi skal nå beregne det magnetiske feltet i et punkt på aksen som ligger i avstand x fra *venstre* ende av spolen. Vindingene som ligger i avstand ℓ fra denne enden over et lite stykke $d\ell$, inneholder $nd\ell$ vindinger. Fra (1) gir de opphav til det differensielle magnetfeltet

$$dB = \frac{\mu_0 a^2 Ind\ell}{2[a^2 + (x-\ell)^2]^{3/2}}$$

som ligger langs spolens akse. Det totale feltet i dette punktet er dermed gitt ved integralet

$$B = \mu_0 a^2 nI \int_0^L \frac{d\ell}{2[a^2 + (x-\ell)^2]^{3/2}}$$

For å få resultatet på en enklere form, er det hensiktsmessig å innføre vinkelen θ som ny integrasjonsvariabel. Fra figuren ser vi at $x - \ell = a\cot\theta$ slik at $d\ell = ad\theta/\sin^2\theta$. Dermed blir også $a^2 + (x-\ell)^2 = a^2/\sin^2\theta$ slik at integralet forenkles til

$$B = \frac{1}{2}\mu_0 nI \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \sin\theta$$

som gir det enkle svaret

$$\boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 nI(\cos\theta_1 - \cos\theta_2)} \tag{3}$$

De to vinklene θ_1 og θ_2 angir de to vinklene som spolens endeflater sees under fra feltpunktet. Dette resulatet gjelder også for magnetfeltet på aksen av en stavmagnet med magnetisering $M = nI$.

La oss til anvende denne formelen i tre viktige tilfeller:

1) Midt i spolen: Her er $\cos\theta_1 = -\cos\theta_2 = (L/2)/\sqrt{a^2 + (L/2)^2} = L/\sqrt{L^2 + D^2}$ hvor $D = 2a$ er spolens diameter. Dermed er feltet i dette punktet

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\sqrt{L^2 + D^2}} \tag{4}$$

Er spolen veldig lang, i.e. $L \gg D$, kan vi Taylor-utvikle nevneren,

$$(L^2 + D^2)^{-1/2} = \frac{1}{L}\Big(1 - \frac{D^2}{2L^2} + \cdots\Big)$$

slik at vi får for feltet midt i spolen

$$B = \mu_0 nI\Big(1 - \frac{D^2}{2L^2}\Big) \tag{5}$$

Feltet i en uendelig lang spole har derfor den konstant everdien $\boxed{B = \mu_0 n I}$.

2) Ved spolens endepunkt: Her har vi $\cos\theta_1 = L/\sqrt{a^2 + L^2}$ og $\cos\theta_2 = 0$ slik at feltet blir

$$B = \frac{\mu_0 N I}{\sqrt{4L^2 + D^2}} \tag{6}$$

Igjen kan vi her ta grensen at spolen blir mye lengre enn dens diameter.

3) Langt unna spolen: Hvis feltpunktet ligger så lang til høyre for spolen at $x \gg a$ og $x \gg a + L$, så finner vi igjen på samme måte at da vil vi tilnærmet ha $\cos\theta_1 = 1 - a^2/2x^2$ og $\cos\theta_2 = 1 - a^2/2(x-L)^2$. Dermed blir feltet

$$B = \frac{1}{4}\mu_0 n I a^2 \left[\frac{1}{(x-L)^2} - \frac{1}{x^2}\right] \tag{7}$$

Hvis nå $x \gg L$, gir en ny Taylor-utvikling $(x-L)^{-2} = (1/x^2)(1 + 2x/L + \cdots)$. Det ledende leddet $1/x^2$ faller da bort, og vi står igjen med dipolfeltet $B = \mu_0 m/2\pi x^3$. Her er nå $m = NI\pi a^2$ dipolmomentet til solenoiden.

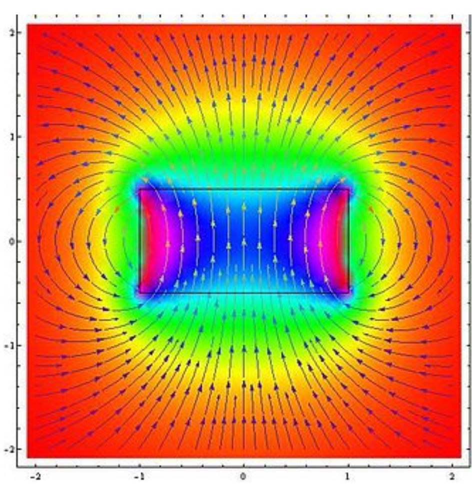


Figure 1: Magnetiske feltlinjer for en solenoid med akse oppover

Finn R.